

Aufgabenblatt zur Prüfung *Analysis*

Hinweis: Es sind keine Näherungslösungen zulässig!

Aufgabe 1: Potenzreihen:

- (a) Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe? **(3 Punkte)**
(b) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen: **(8 Punkte)**

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^{2n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (3x+1)^n \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Stetigkeit:

- (a) Wann nennt man eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig? **(3 Punkte)**
(b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktion **(5 Punkte)**

$$f(x) = \frac{\ln[(x+1)^2]}{x^2 - 2x}$$

- (c) Zeigen Sie, daß sich die Funktionen

$$f(x) = \frac{-(x-3)^2}{x-2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{(x+1)^2 + x^2}{x-1}$$

im Intervall $[-1, 3]$ wenigstens in einem Punkt schneiden. **(5 Punkte)**

Aufgabe 3: Differentialrechnung:

- (a) Berechnen Sie die ersten 3 Glieder (inklusive eventueller Nullglieder) der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x_0 = \pi$. **(5 Punkte)**
(b) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^2 e^x$$

Berechnen Sie jeweils beide Koordinaten der Punkte. **(8 Punkte)**

Aufgabe 4: Integralrechnung:

- (a) Was versteht man unter einer Stammfunktion F einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? **(2 Punkte)**
(b) Berechnen Sie die Integrale: **(6 Punkte)**

$$\begin{aligned} & \int (2x+3) \ln(x^2-1) dx \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

- (c) Zeigen Sie, daß sich die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = -3x^2 + x - 1$$

in genau zwei Punkten schneiden und berechnen Sie den Inhalt der von den Graphen zwischen den Schnittpunkten eingeschlossenen Fläche. **(5 Punkte)**