Testat Berechenbarkeit/Komplexität, 4. Semester

Arbeitszeit 90 Minuten, pro Aufgabe 5 Punkte. Bitte jede Aufgabe auf *genau* einem Blatt bearbeiten und auf *jedes* Blatt Namen und Matrikelnummer schreiben.

1. Die Funktion $f = \mathrm{Ind}(g, h)$ entsteht durch den Induktionsoperator (d. h. durch primitve Rekursion) aus den Funktionen

   $$g(x) = x, \qquad h(x, y, z) = (x + y) \dot{-} z.$$

   Dabei ist die eingeschränkte Subtraktion $\dot{-}$ definiert durch $a \dot{-} b = \max(0, a - b)$.

   Berechnen Sie $f(0, 0), f(1, 1), f(2, 2), f(3, 3), f(2001, 2001)$.

2. Welche der folgenden Funktionen g_i sind zur Gödelisierung von Zahlenpaaren geeignet?

   $$\begin{array}{rl} g_1(x, y) = x^2 + y & g_2(x, y) = (x + y + 1)^2 + y \\ g_3(x, y) = 24^x \cdot 25^y & g_4(x, y) = x^y \end{array}$$

   Begründen Sie Ihre Antworten durch *Beispiele*.

3. Berechnen Sie $f(0), f(1), f(2), f(3), f(10^6)$ für die Funktion

   $$f(x) = \mu \{y \mid y + 2 > x\}$$

   Ist die Funktion f primitiv rekursiv? (Begründen Sie.)

---

1. Es ergeben sich $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = 0$, $f(2, 2) = 3$, $f(3, 3) = 1$ und $f(2001, 2001) = 1000$.

2. Nicht geeignet sind g_1 wegen z. B. $g_1(0, 4) = g_1(2, 0) = 4$ und g_4 wegen z. B. $g_4(4, 2) = g_4(2, 4) = 16$ also sind beide nicht injektiv.

   Die beiden anderen sind geeignet. Es muss jeweils die Injektivität, die Entscheidbarkeit und die Berechenbarkeit der Umkehrfunktion gezeigt werden. (Geht.)

3. Es ergeben sich $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$ und $f(10^6) = 10^6 - 1$, jeweils, da für alle kleineren y die Ungleichung nicht erfüllt ist.

   Diese Funktion ist primitiv rekursiv, da sie der Vorgängerbildung entspricht, die primitiv rekursiv ist. (Beweis, dass sie dem wirklich entspricht muss geführt werden.)