

2. Testat Berechenbarkeit/Komplexität, 4. Semester

Arbeitszeit 90 Minuten, pro Aufgabe 5 Punkte. Bitte jede Aufgabe auf *genau* einem Blatt bearbeiten und auf *jedes* Blatt Namen und Matrikelnummer schreiben.

1. (a) Geben Sie zwei *nicht entscheidbare* Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ an, deren Durchschnitt $A \cap B$ *entscheidbar* ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $C \cup D$ von zwei entscheidbaren Mengen $C, D \subseteq \mathbb{N}$ *immer* entscheidbar ist. Geben sie dazu ein Programm an, das die charakteristische Funktion von $(C \cup D)$ berechnet.
2. Beweisen Sie: Wenn eine aufzählbare Menge auf ihr Komplement reduzierbar ist, dann ist sie entscheidbar.
Vorsicht: Die Aussage " $(A \text{ ist aufzählbar}) \wedge (A \leq B) \Rightarrow (B \text{ aufzählbar})$ " ist *nicht* allgemeingültig! *Lösungsweg:* Zeigen Sie zunächst $(A \leq B) \Rightarrow (\overline{B} \leq \overline{A})$.
3. Welche der folgende Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie!
 - (a) Eingabe: zwei reguläre Grammatiken G_1, G_2
Frage: gilt $\emptyset = L(G_1) \cap L(G_2)$?
 - (b) Eingabe: zwei kontextfreie Grammatiken G_1, G_2
Frage: gilt $\emptyset = L(G_1) \cap L(G_2)$?

Hinweise: Benutzen Sie die Übungsaufgabe zur Kodierung von PCPs in Grammatiken. Wie kann man die Sprache aller Palindrome erzeugen?

-
1. Bei (a) z.B. eine beliebige nicht entscheidbare Menge (z.B. Menge der Gödelnummern aller PCP mit Lösung) und ihr Komplement. Der Durchschnitt ist dann entscheidbar weil leer.
Bei (b) einfach $\chi_{C \cup D} = \max(\chi_C, \chi_D)$.
 2. Tja, muss ich nacharbeiten.
 3. Bei (a): Ja, weil nach Pumping-Lemma die Ableitung endlich vieler Worte aus G_1, G_2 genügt, die dann verglichen werden können.
Bei (b): Nein.