3. Testat Berechenbarkeit/Komplexität, 4. Semester

Arbeitszeit 90 Minuten, Punktverteilung: $4 + 4 + 7 = 15$. Bitte jede Aufgabe auf *genau* einem Blatt bearbeiten und auf *jedes* Blatt Namen und Matrikelnummer schreiben.

Für die beiden Funktionen

$$f(n) = n^2 \text{ und } g(n) = (\log n)^{\log n}$$

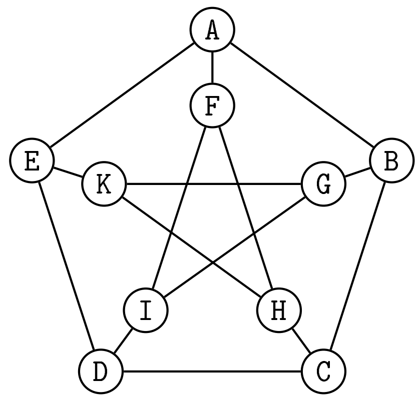
(Logarithmen zur Basis 2 und abgerundet) gilt $f \in O(g)$ sowie $g \notin O(f)$.
Geben Sie Zahlen c und n_0 an, so dass $\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$. (2 Punkte)
Geben Sie für $c = 100$ und $n_0 = 5$ ein $n \geq n_0$ an, für das $g(n) \geq c \cdot f(n)$. (1 Punkt)
Gibt es irgendein Polynom p, so dass $g \in O(p)$? (1 Punkt)

Definition: Eine Knotenüberdeckung (vertex cover) eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $V' \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass für jede Kante $xy \in E$ die Aussage $x \in V' \vee y \in V'$ gilt.
Definition: $\mathsf{VC} = \{(G, k) \mid G \text{ besitzt Knotenüberdeckung } V' \text{ mit } |V'| \leq k\}$.

Finden Sie für nebenstehenden Graphen

1. eine 3-Färbung (1 Punkt)
2. eine grösste Clique (1 Punkt)
3. eine Knotenüberdeckung der Grösse 6 (1 Punkt)

und begründen Sie, dass der Graph keine Knotenüberdeckung mit weniger als sechs Knoten besitzt. (Hinweis: der Graph enthält zwei disjunkte Kreise.) (1 Punkt)



Der folgende Algorithmus A konstruiert aus einer aussagenlogischen Formel $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_k$ in konjunktiver Normalform mit je drei Literalen pro Klausel einen Graphen $G = A(F)$. (Die in F vorkommenden Variablen sind $x_1, \ldots, x_v$.)
Der Graph G enthält die $2v$ Knoten $V_x = \{x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_v, \overline{x_v}\}$ und die $3k$ Knoten $V_K = \{K_{11}, K_{12}, K_{13}, \ldots, K_{k1}, K_{k2}, K_{k3}\}$, sowie

- Kanten innerhalb V_x: für alle $1 \leq i \leq v$ die Kante $x_i\overline{x_i}$,
- Kanten innerhalb V_K: für alle $1 \leq i \leq k$ die drei Kanten zwischen $\{K_{i1}, K_{i2}, K_{i3}\}$,
- Kanten zwischen V_x und V_K: für jede Klausel $K_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ die Kanten $l_{ij}K_{ij}$.

Zeichnen Sie den Graphen $A(F_0)$ für $F_0 = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$, und geben Sie eine Knotenüberdeckung von $A(F_0)$ mit 11 Knoten an. (1 Punkt)
Beweisen Sie für beliebige F, dass jede Knotenüberdeckung von $A(F)$ aus wenigstens $v + 2k$ Knoten besteht. (Hinweis: dazu genügt es, die Kanten innerhalb V_x und innerhalb V_K zu betrachten.) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Knotenüberdeckung mit genau $v + 2k$ Knoten einer erfüllenden Belegung von F entspricht. (Arbeitsschritte: 1. die Überdeckung definiert eine Belegung, 2. diese Belegung erfüllt die Formel.) (2 Punkte)
Finden Sie die Belegung, die zu Ihrer Knotenüberdeckung für $A(F_0)$ gehört! (1 Punkt)
Benutzen Sie den Algorithmus A, um zu zeigen, dass VC NP-vollständig ist. (1 Punkt)

- z. B. $c = 1$ und $n_0 = 16 = 2^{2^2}$, da

$$\begin{aligned} n^2 \leq (\log n)^{\log n} &\Leftrightarrow 2\log n \leq \log n \cdot \log\log n \\ &\Leftrightarrow 2 \leq \log\log n \\ &\Leftrightarrow 2^{2^2} \leq n \end{aligned}$$

- z. B. $n = 256 = 2^{2^3}$, da

$$\begin{aligned} (\log n)^{\log n} > 100n^2 = (10n)^2 &\Leftrightarrow \log n \cdot \log\log n > 2 \cdot \log 10n \\ &\Leftrightarrow \log n \cdot (\log\log n - 2) > 2\log 10 \end{aligned}$$

  Wenn man es numerisch ausrechnet kommt man auf $n > 172.762\ldots$, also $n > 172$.

- Nein, wäre $g \in O(n^k)$, dann $\exists n_0, c : \forall n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} g(n) \leq c \cdot n^k &\Leftrightarrow (\log n)^{\log n} \leq c \cdot n^k \\ &\Leftrightarrow \log n \cdot \log\log n \leq k \log \sqrt[k]{c} + k \log n \\ &\Leftrightarrow \log n \cdot (\log\log n - k) \leq k \sqrt[k]{c} \end{aligned}$$

  Das gilt jedoch nicht, da rechts für gegebenes k eine Konstante steht, der Term links aber über alle Schranken wächst.

- 3-Färbung: $\{\{A, C, I, K\}, \{E, G, H\}, \{B, D, F\}\}$.
- eine grösste Clique: $\{A, B\}$.
- Knotenüberdeckung: $\{A, B, D, K, H, I\}$

In einer Knotenüberdeckung müssen alle Kanten des äusseren Kreises überdeckt werden, dafür werden drei Knoten benötigt, nehmen wir o. B. d. A. die Knoten A, B, D. Nun müssen die Brücken zum inneren Kreis alle überdeckt werden, also müssen die Knoten K, H mit in die Überdeckung. Nun haben wir bereits fünf Knoten und nicht alle Kanten überdeckt, also werden mindestens sechs Knoten benötigt.

Skizze kein Bock, zur Überdeckung in V_x werden genau v Kanten und für die k Kreise jeweils zwei benötigt, jeweils nach Konstruktion, die Belegung ordnet den Elementen aus V_x wahr zu, wenn sie in der Überdeckung enthalten sind, Belegung z. B. 000 und $\mathsf{3SAT} \leq_p \mathsf{VC}$ liegt in NPC.