

Deckblatt

Testklausur Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Dieses Deckblatt bitte in Blockschrift ausfüllen und mit der Klausur abgeben! Jedes Lösungsblatt ist mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu beschriften. Für jede Aufgabe sind separate Lösungsblätter zu verwenden!

Name, Vorname :

Matrikelnummer:

Bearbeitete Aufgaben:

(Bitte ankreuzen)

Aufgabe	1 <i>7 Pkt.</i>	2 <i>8 Pkt.</i>	3 <i>13 Pkt.</i>	4 <i>12 Pkt.</i>	5 <i>6 Pkt.</i>
bearbeitet					
erreichte Punkte					

Aufgabenblatt I: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Hinweis: Näherungslösungen sind nur für Winkel zulässig. Gegebenenfalls ist mit Brüchen und Wurzelausdrücken zu rechnen!

Aufgabe 1: (a) Definieren Sie den Begriff der Gruppe. **(4 Punkte)**

(b) Besitzt die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_3 Untergruppen der Ordnung 2,3 bzw. 4? Geben Sie im Falle der Existenz eine Untergruppe der entsprechenden Ordnung an. Begründen Sie andernfalls, warum es keine Untergruppe der entsprechenden Ordnung gibt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 2: Rangbestimmung von Matrizen:

(a) Bestimmen Sie den Rang von $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ in Abhängigkeit von der reellen Zahl α . **(4 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie den Rang von $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1-i & e^{i\pi} & -3 & i \\ 3+\sqrt{3}i & 2+i & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}$ **(4 Punkte)**

Aufgabe 3: Betrachten Sie die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsvorschrift

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, 2x_1 - 4x_3 + 2x_5, 3x_2 + 6x_3 + 3x_4)$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der geordneten Basen

$$B = ((1, 0, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0), (1, 1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 1))$$

für den Vor- und

$$C = ((1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3))$$

für den Nachbereich an. **(6 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Bild}(F)$. **(1 Punkt)**

(c) Bestimmen Sie den Nullraum von F . **(6 Punkte)**

Aufgabe 4: Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsmatrix

$$\mathfrak{A}_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Basis $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ für Vor- und Nachbereich.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Abbildung F . **(11 Punkte)**

(b) Gibt es eine Basis C des \mathbb{R}^3 , bezüglich welcher die Abbildungsmatrix von F in Diagonalgestalt ist? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

Aufgabe 5: Berechnen Sie mittels des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 1, 0) \\ v_2 &= (1, -1, 1, 1) \\ v_3 &= (3, 1, 3, 3) \end{aligned}$$

aufgespannten linearen Teilraumes des \mathbb{R}^4 . **(6 Punkte)**

Musterlösungen und Bewertungen

I	II	III	IV	V
46 - 42	41 - 33	32 - 24	23 - 17	16 - 0

Aufgabe 1: (a) Eine Gruppe $G = (G, \circ)$ ist eine algebraische Struktur bestehend aus einer Trägermenge G und einer binären Operation $\circ : G \times G \rightarrow G$ **(1 Punkte)**

mit den Eigenschaften:

- i. $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativität) **(1 Punkte)**
 - ii. $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$ (Existenz eines Einselementes) **(1 Punkte)**
 - iii. $\forall a \in G \exists a' \in G : a \circ a' = a' \circ a = e$ (Existenz inverser Elemente) **(1 Punkte)**
- (b) i. Beispiel für Ordnung 2: $\{(1), (1\ 2)\}$ **(1 Punkte)**
 ii. Beispiel für Ordnung 3: $\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ **(1 Punkte)**
 iii. Untergruppen der Ordnung 4 gibt es wegen $4 \nmid \text{Ord}(\mathfrak{S}_3) = 6$ nicht. **(1 Punkte)**

Aufgabe 2: Rangbestimmung von Matrizen:

(a) Anwendung der Zeilenoperationen $z_2 - 4z_1$ $z_3 - z_1$ liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha - 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Anwendung der Zeilenoperation $-\frac{1}{5}z_2$ und anschließend $z_3 - (\alpha - 2)z_2$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2(\alpha - 2) + \alpha - 3 & -3 - 3(\alpha - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & 3(1 - \alpha) \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

Also gilt $\text{Rang}(\mathfrak{A}) = \begin{cases} 2 & : \text{ falls } \alpha = 1 \\ 3 & : \text{ falls } \alpha \neq 1 \end{cases}$ **(1 Punkte)**

(b) $e^{i\pi} = -1$ und Anwendung der Spaltenoperation $s_4 + is_2$ ergibt **(1 Punkte)**

$$\begin{pmatrix} 1 - i & -1 & -3 & 0 \\ 3 + \sqrt{3}i & 2 + i & 0 & 2i \\ 2 & 0 & 1 + i & 0 \\ 1 - i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenoperation $z_1 \leftrightarrow z_2$, anschließend Spaltenoperation $s_1 \leftrightarrow s_4$ **(2 Punkte)**

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 + i & 0 & 3 + \sqrt{3}i \\ 0 & -1 & -3 & 1 - i \\ 0 & 0 & 1 + i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - i \end{pmatrix}$$

Also $\text{Rang}(\mathfrak{B}) = 4$ **(1 Punkte)**

Aufgabe 3: (a)

$$\begin{aligned} F((1, 0, 0, 0, 0)) &= (1, 2, 0) \hat{=} (0, 1, 0)_C && \text{(1 Punkte)} \\ F((1, -1, 0, 0, 0)) &= (0, 2, -3) \hat{=} (-1, 2, -1)_C && \text{(1 Punkte)} \\ F((1, 1, -1, 0, 0)) &= (1, 6, -3) \hat{=} (-2, 4, -1)_C && \text{(1 Punkte)} \\ F((0, 0, 0, 1, 1)) &= (2, 2, 3) \hat{=} (1, 0, 1)_C && \text{(1 Punkte)} \\ F((0, 0, 0, 0, 1)) &= (1, 2, 0) \hat{=} (0, 1, 0)_C && \text{(1 Punkte)} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(1 Punkte)}$$

(b) $\dim(\text{Bild}(F)) = \text{Rang}(\mathfrak{A}_F) = 3$ (1 Punkte)

(c) Abbildungsmatrix bezüglich der entsprechenden Einheitsvektorbasis E für Vor- und Nachbereich ist

$$\mathfrak{A}_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Nullraum von F ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathfrak{A}_{F,E}^T \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$. (1 Punkte)

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Überführen in Zeilenstufenform mittel Gauß-Jordan-Algorithmus ergibt (3 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $\text{Null}(F) = \text{Span}\{(-1, 0, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 1, 0)\}$ (2 Punkte)

Aufgabe 4: (a) Es sind die Eigenwerte von $\mathfrak{A}_F^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen. (1 Punkte)

Das charakteristische Polynom lautet $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$

(3 Punkte)

Mögliche rationale Nullstellen sind $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$. Probieren liefert die erste Nullstelle $\lambda_1 = 2$. (1 Punkte)

$(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 4$, also sind $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$ die weiteren Nullstellen. (2 Punkte)

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: Zu Lösen ist das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{A}_F^T - 2\mathfrak{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Anwendung von Gauß-Jordan liefert $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also gilt $ER(2) = \text{Span}\{(1, 1, 1)\}$.

(2 Punkte)

Analog erhält man $ER(-2) = \text{Span}\{(1, -1, 1)\}$.

(2 Punkte)

(b) Wegen $1 = gV(2) < aV(2) = 2$ gibt es keine derartige Basis.

(1 Punkte)

Aufgabe 5: Normierung von v_2 ergibt

$$u_1 = \frac{1}{|v_2|} v_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1) \quad \text{(1 Punkte)}$$

u_1 soll als erster Vektor in die Orthonormalbasis C aufgenommen werden. Berechne

$$\hat{v}_1 = v_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \quad \text{(1 Punkte)}$$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) u_1 = (1, 3, 1, 1) \quad \text{(1 Punkte)}$$

Normiere \hat{v}_1 , also

$$u_2 = \frac{1}{|\hat{v}_1|} \hat{v}_1 = \hat{v}_1 \quad \text{(1 Punkte)},$$

und nehme u_2 in C auf. Berechne schließlich $\tilde{v}_3 = \hat{v}_3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) u_2 = (0, 2, 0, 2)$

(1 Punkte)

Normieren von \tilde{v}_3 liefert den letzten Vektor $u_3 = \frac{1}{|\tilde{v}_3|} \tilde{v}_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0, 1, 0, 1)$

(1 Punkte)

der Orthonormalbasis $C = \left\{\frac{1}{2}(1, -1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1), \frac{1}{2}\sqrt{2}(0, 1, 0, 1)\right\}$.