Prüfungsklausur am 11.07.2001, 14 bis 16.30 Uhr, HS 13
Wahrscheinlichkeitstheorie/Statistik (Aufgaben 1,2) und Numerik (Aufgaben 3,4)

Aufgabe 1: Es sei X eine reelle stetige Zufallsgrösse mit Erwartungswert 1 und einer Verteilungsdichte der Form $f(x) = \alpha e^{-|x-\beta|}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Parameter α und β.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgrösse X.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgrösse $X^2 + 2$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E)$, $P(F)$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|F)$ mit den Ereignissen $E = \{-2 < X < 4\}$, $F = \{1 < X < 7\}$.

Aufgabe 2: Es seien X, Y zwei unabhängige und im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsgrössen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgrösse $|X - Y|$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\left(\min\{|X|, |Y|\} \leq 2/3\right)$.

Aufgabe 3: Von einer unbekannten Funktion $y = f(x)$ sind die in der folgenden Tabelle angegebenen Wertepaare bekannt:

x	11	13	14	18	19	21
y	1342	2210	2758	5850	6878	9282

Berechnen Sie mit Hilfe der Polynominterpolation und dividierten Differenzen einen Funktionswert an der Stelle $x = 13.5$.

Aufgabe 4: Auf das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -3 & 30 & -3 \\ -6 & 4 & 20 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

werde das Gauss-Seidel-Verfahren (Iteration in Einzelschritten) mit dem Nullvektor als Startvektor angewendet.

a) Wie lautet die Iterationsmatrix M, wenn das Iterationsverfahren in der Form $x_{k+1} = Mx_k + c$, $k = 0, 1, \ldots$ geschrieben wird?

b) Berechnen Sie den Spektralradius der Iterationsmatrix.

c) Konvergiert das Gauss-Seidel-Verfahren für das vorliegende Gleichungssystem?

d) Berechnen Sie die ersten drei Näherungen x_1, x_2, x_3.

Lösungsideen

Aufgabe 1:

(a). Damit f eine Dichte einer Zufallsgrösse ist, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_{-\infty}^{b} e^{x-b}\,\mathrm{d}x + \alpha \int_{b}^{\infty} e^{b-x}\,\mathrm{d}x = 2\alpha = 1$$

und aus $E(X) = 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_{-\infty}^{b} x e^{x-b}\,\mathrm{d}x + \alpha \int_{b}^{\infty} x e^{b-x}\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot 2\beta = 1.$$

Also muss gelten $\alpha = 1/2$ und $\beta = 1$.

(b). Für die Verteilungsfunktion $F = F(x)$ von X gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t-1|}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t-1} & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} e^{t-1} + \frac{1}{2}\int_{1}^{x} e^{1-t} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{1-x} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c). Für die Verteilungsfunktion $G = G(x)$ von $X^2 + 2$ gilt $G(x) = \tilde{G}(x-2)$, wenn $\tilde{G}$ die Verteilungsfunktion von X^2 ist und damit:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ \frac{1}{2}e^{\sqrt{x-2}-1} & \text{für } x < 3 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{1-\sqrt{x-2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d). Es gilt

$$\begin{aligned} P(E) &= F(4) - F(-2) = 1 - e^{-3} \approx 0.950 \\ P(F) &= F(7) - F(1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-6}) \approx 0.499 \\ P(E|F) &= \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{F(4) - F(1)}{F(7) - F(1)} = \frac{e^3}{1 + e^3} \approx 0.953 \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a). Es gilt

$$E(|X-Y|) = 2\int_0^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn $f = f(x)$ die Dichte von $X - Y$ ist. Für f gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

wenn f_X und f_Y die Dichten von X und Y sind. Mit

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_{[-1,1]\cap[x+1,x-1]} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|) & \text{für } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(siehe Klausur Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik vom 09.02.2001) und damit

$$E(|X-Y|) = 2\int_0^2 \frac{x}{4}(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

(b). Es gilt mit der Definition der Wahrscheinlichkeit, der Unabhängigkeit von X und Y und deren identischer Verteilung:

$$\begin{aligned}
P\left(\min\{|X|,|Y|\} \le 2/3\right) &= 1 - P\left(\min\{|X|,|Y|\} > 2/3\right) \\
&= 1 - P\left(\{|X| > 2/3\} \cap \{|Y| > 2/3\}\right) \\
&= 1 - P\left(\{|X| > 2/3\}\right) \cdot P\left(\{|Y| > 2/3\}\right) \\
&= 1 - P\left(\{X > 2/3\} \cup \{X < -2/3\}\right)^2 \\
&= 1 - \left(P\left(\{X > 2/3\}\right) + P\left(\{X < -2/3\}\right)\right)^2 \\
&= 1 - (1/6 + 1/6)^2 = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Die dividierten Differenzen berechnen sich rekursiv gemäss

$$\begin{aligned} f[x_i] &= y_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i} \end{aligned}$$

Das sich ergebende Dreiecksschema hat die Gestalt:

11	1342					
13	2210	434				
14	2758	548	38			
18	5850	773	45	1		
19	6878	1028	51	1	0	
21	9282	1202	58	1	0	0

Die Werte $f[x_0], \ldots, f[x_0, \ldots, x_5]$ auf der Diagonalen sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_5$ in der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms $p = p(x)$ zu den gegebenen Stützstellen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{5} \left(a_k \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l) \right)$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(13.5) \approx p(13.5) &= \sum_{k=0}^{5} \left(f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{l=0}^{k-1} (13.5 - x_l) \right) \\ &= 1342 + 434\frac{5}{2} + 38\frac{5}{2}\frac{1}{2} - 1\frac{5}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 0\frac{5}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{9}{2} - 0\frac{5}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{11}{2} \\ &= 1342 + 1085 + \frac{95}{2} - \frac{5}{8} + 0 - 0 \\ &= \frac{19791}{8} = 2473.875. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a). Die Iterationsmatrix M ist gegeben durch $M = -(D+L)^{-1}R$, wenn $A = L+D+R$ gilt und D Diagonalmatrix und L und R untere bzw. obere Dreiecksmatrix sind. Es gilt

$$A = L + D + R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und mit

$$(D+L)^{-1} = \frac{1}{1500} \begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 15 & 50 & 0 \\ 42 & -10 & 75 \end{pmatrix}$$

folgt

$$M = \frac{1}{500} \begin{pmatrix} 0 & 100 & -50 \\ 0 & 10 & 45 \\ 0 & 28 & -24 \end{pmatrix}.$$

(b). Für den Spektralradius $\rho = \rho(M)$ gilt:

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } M\}.$$

M hat die drei Eigenwerte 0 und $\frac{-7\pm\sqrt{1549}}{500}$ und daraus folgt $\rho(M) = \frac{7+\sqrt{1549}}{500} \approx 0.093$.

(c). Ja, da $\rho(M) < 1$.

(d). Zunächst gilt noch

$$c = (D+L)^{-1}b = 5^{-3}\,(50, 105, 19)^\top$$

und mit $x_0 = (0,0,0)^\top$ folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= 5^{-3}\,(50, 105, 19)^\top = (0.4000, 0.8400, 0.1520)^\top \\ x_2 &= 10^{-2}5^{-4}\,(34550, 54405, 11984)^\top \approx (0.5528, 0.8705, 0.1917)^\top \\ x_3 &= 10^{-3}5^{-6}\,(8670650, 13666665, 2992862)^\top \approx (0.5549, 0.8746, 0.1915)^\top \end{aligned}$$

Die euklidischen Abstände der x_i $(i = 0, \ldots, 3)$ von der exakten Lösung $x = \frac{1}{511}\,(284, 447, 98)^\top \approx (0.5558, 0.8748, 0.1918)^\top$ betragen rund 1.274, 0.480, 0.085, 0.034, also ist x_3 bereits ziemlich genau.