Klausur am 9.2.2001

Aufgabe 1: In einem Bus befinden sich 20 Fahrgäste. An der nächsten Haltestelle steigt jeder Fahrgast mit einer Wahrscheinlichkeit 0.4 aus. Ferner ist bekannt, daß an der Haltestelle höchstens ein Fahrgast zusteigt. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an der Haltestelle kein neuer Fahrgast zusteigt, gleich 0.1, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein neuer Fahrgast einsteigt, gleich 0.9. Das Ein- und Aussteigen der einzelnen Fahrgäste erfolge völlig unabhängig voneinander. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Abfahrt des Busses von der Haltestelle wieder genau 20 Fahrgäste im Bus sind. $\boxed{\text{5 Pkt.}}$

Aufgabe 2: Die Zufallsgrössen g_1, g_2, g_3 seien unabhängig und identisch binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 1/3$, d. h. es ist für $i = 1, 2, 3$: $\boxed{\text{5 Pkt.}}$

$$P(g_i = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\left(\min\left(g_1^2, g_2, 2g_3\right) \geq 2\right)$.

Aufgabe 3: Eine diskret verteilte Zufallsgrösse g nehme nur positive ganzzahlige Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$$P(g = n) = n4^{n-1}/5^{n+1} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

a) Bestimmen Sie eine erzeugende Funktion für g. $\boxed{\text{4 Pkt.}}$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(g)$ und die Varianz $V(g)$ der Zufallsgrösse g. $\boxed{\text{2 Pkt.}}$

Aufgabe 4: Es seien g_1, g_2, g_3 drei unabhängige und jeweils im Intervall $[-2, 2]$ gleichmäßig verteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-1 < g_1 + g_2 + g_3 < 1)$. $\boxed{\text{6 Pkt.}}$

Aufgabe 5: Es sei g eine im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgröße.

a) Zeigen Sie: Ist $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton, dann gilt: $\boxed{\text{3 Pkt.}}$

$$E(\varphi(g)) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von g und $h = g^2$. $\boxed{\text{4 Pkt.}}$

c) Bestimmen Sie die Regressionsgrade von $h = g^2$ bezüglich g. $\boxed{\text{1 Pkt.}}$